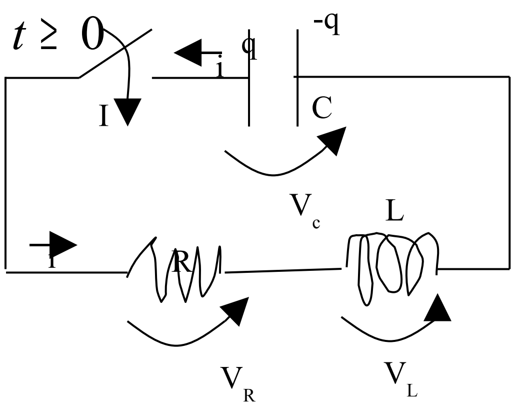
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Aula Teórica nº 32
LEM-2006/2007

Prof. responsável de EO: Mário J. Pinheiro

Oscilações eléctricas num circuito RLC

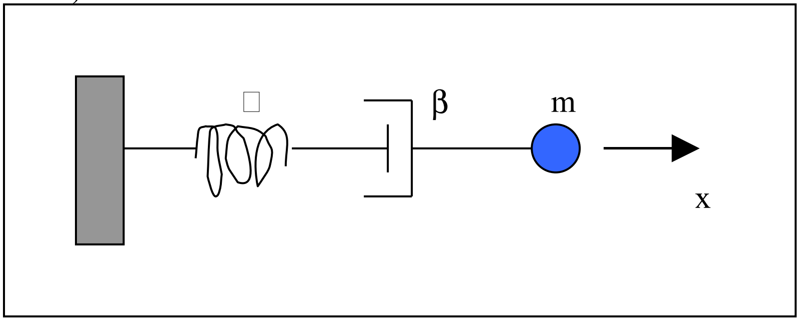
Considere-se agora um condensador inicialmente carregado com a carga q_0 e que no instante t=0 é descarregado sobre um circuito eléctrico de resistência R e corficiente de auto-indução L, por fecho do interruptor I.



O condensador vai-se descarregar sendo $q(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Neste caso tem-se: [1]

Esta é uma equação diferencial de 2ª ordem homogénea (com o segundo membro nulo) e que é igual à equação encontrada na mecânica para um oscilador harmónico linear livre com atrito. As diferentes soluções encontradas para o sistema mecânico podem ser simuladas usando um circuito eléctrico.

Em primeiro lugar recordemos a situação vista no curso de mecânica. Seja uma massa m, presa por uma mola de constante de restituição K e sujeita a um atrito β (factor de atrito).



A equação do movimento toma a forma:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{rest} + \vec{F}_{at}$$

$$m\vec{a} = -Kx\vec{u}_x - \beta v\vec{u}_x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ é a <u>frequência própria da oscilação</u> e $\lambda = \frac{\beta}{2m}$ é o <u>coeficiente de atrito.</u>

No caso do circuito eléctrico tem-se igualmente

$$\frac{d^2v_c}{dt^2} + 2\lambda\frac{dv_c}{dt} + \omega_0^2 v_c = 0,$$

com $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e $\lambda = \frac{R}{2L}$.

As soluções para $v_c(t)$ são assim do mesmo tipo das soluções encontradas na mecânica para x(t). O atrito é devido aqui è presença da resistência eléctrica que é o elemento dissipativo, pelo que as soluções vão-se anular quando $t \to \infty$ (<u>regime livre amortecido</u>).

Na mecânica viu-se que uma equação diferencial do tipo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

admite como soluções exponenciais do tipo $x = A\exp(st)$, pelo que substituindo obtém-se:

$$s^2Ae^{st} + 2\lambda sAe^{st} + \omega_0^2 Ae^{st} = 0$$

$$\boxed{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 = 0}$$

Esta última equação é chamada de <u>equação característica</u> e tem como soluções:

$$s_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Podem-se encontrar diferentes regimes:

i) Amortecimento fraco, $\lambda < \omega_0$.

$$s_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\omega$$

com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. As raízes são complexas conjugadas:

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 e^{(-\lambda + j\omega)t} + A_2 e^{(-\lambda - j\omega)t}$$

Para que x(t) seja real é necessário que as constantes A_1 e A_2 sejam também complexas conjugadas, podendo-se escrever com generalidade:

$$A_1 = \frac{1}{2} A e^{j\phi}\,; \qquad A_2 = \frac{1}{2} A e^{-j\phi}$$

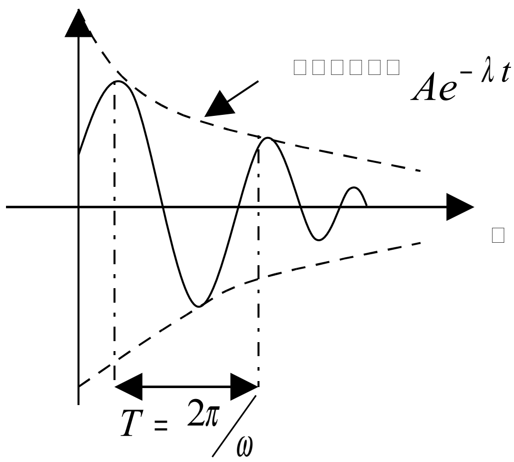
e, portanto,

$$x(t) = \frac{1}{2} A e^{-\lambda t} e^{j(\omega t + \phi)} + \frac{1}{2} A e^{-\lambda t} e^{-j(\omega t + \phi)}$$
$$= \frac{1}{2} A e^{-\lambda t}\left[e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}\right]$$

Como $e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta} = 2\cos\vartheta$, tem-se por fim

$$\boxed{x(t) = A e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi)}$$

Encontrou-se assim uma solução periódica de frequência $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ e cujas amplitudes se vão amortecendo no tempo $x_0(t) = A e^{-\lambda t}$.



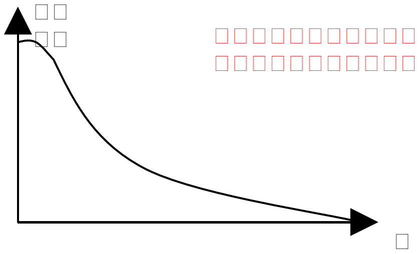
A este regime chama-se oscilante (ou periódico) amortecido.

ii) Amortecimento forte, $\lambda > \omega_0$:

$$s_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0$$

As raízes são reais e negativas. A solução toma a forma:

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 e^{-|s_1| t} + A_2 e^{-|s_2| t}}$$



iii) Amortecimento crítico, $\lambda = \omega_0$:

$$s_1 = s_2 = -\lambda \text{ , raíz dupla negativa}$$

A solução é da forma:

$$\boxed{x(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t}}$$

sendo A e B agora as duas constantes de integração. A esta situação chama-se regime aperiódico limite.

Vê-se assim que o tipo de regime encontrado depende dos parâmetros do sistema em causa. O regime é periódico amortecido quando $\frac{\beta}{2m} < \sqrt{\frac{K}{m}}$ no caso do sistema mecânico, ou $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, isto é, $\boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$ no caso do circuito eléctrico.

Pode-se simular as oscilações de um sistema mecânico usando um circuito eléctrico, com os parâmetros R, L, C convenientemente escolhidos de forma a se obter o regime pretendido.

Repare que o regime que se encontra depende dos parâmetros do circuito e não do facto de escrevermos a equação do sistema para a d.d.p. do condensador, para a intensidade da corrente i, ou para a d.d.p. aos terminais da bobine. Todas as grandezas eléctricas que definirmos no circuito evoluem no tempo com o mesmo tipo de regime, o qual só depende dos valores de R, L e C.

Verifiquemos o que acabamos de dizer para a intensidade i(t) do circuito:

[1]

que é uma equação semelhante à equação anteriormente obtida para $v_c(t)$.
Por último, analisemos as constante de integração A_1 e A_2 obtidas na solução amortecida. No caso aqui em estudo, o circuito tem dois elementos armazenadores de energia (um condensador e uma bobine), pelo que a equação encontrada é de 2ª ordem, introduzindo-se duas constantes de integração. Estas são obtidas pelas condições iniciais que correspondem à continuidade das energias eléctrica e magnética armazenada nos dois elementos.

No condensador:

$$W_e(0^-) = W_e(0^+) \quad \Rightarrow \quad v_c(0^-) = v_c(0^+),$$

pois $W_e = \dfrac{1}{2}Cv_c^2$.

Na bobine:

$$W_m(0^-) = W_m(0^+) \quad \Rightarrow \quad i(0^-) = i(0^+),$$

pois $W_m = \dfrac{1}{2}Li^2$.

Se o condensador se encontrar inicialmente carregado com uma carga q_0, $v_c(0^-) = \dfrac{q_0}{C}$, e o interruptor I aberto $i(0^-) = 0$.

Análise de circuitos mais complexos

1) Leis de Kirchhoff em regime estacionário

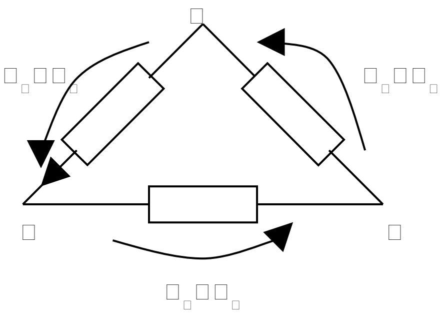
Em corrente estacionária tem-se $rot\vec{E}^e = 0$ e $div\vec{J} = 0$. Destas duas equações podemos estabelecer as chamadas leis de Kirchhoff[1] que são o ponto de partida na análise de circuitos.

i) Lei das malhas:

Se $rot\vec{E}^e = 0 \Rightarrow \oint_\gamma (\vec{E}^e . d\vec{p}) = 0$

Seja agora uma malha fechada com vários elementos de circuito (resistências, condensadores ou bobines).

[1] Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887). A sua importante descoberta ocorreu em 1845, permitindo o cálculo das correntes, tensões e resistências dos circuitos eléctricos com várias malhas. Kirchhoff considerou redes eléctricas, consistindo em circuitos unidos por nós, e deu as leis que reduzem o cálculo em cada malha a um conjunto de equações algébricas. Aprimeira lei estabelece que a soma das correntes que se dirigem para um dado nó é igual à soma das correntes que partem desse nó. A segunda lei estabelece que a soma das forças electromotrizes numa malha de uma rede é igual à soma das quedas de potencial em cada elemento da malha.
As leis de Kirchhoff resultaram da aplicação da lei de Ohm. Por esta altura Kirchhoff não tinha conhecimento da analogia estabelecida por Ohm entre o fluxo de calor e o fluxo de electricidade, que constituía a ideia (errada) que se tinha a corrente eléctrica na altura. Na medida em que não existe fluxo de calor num corpo com temperatura uniforme, julgava-se que uma corrente estática se podia estabelecer num condutor. Mas o trabalho de Kirchhoff conduziu-o a compreender a natureza deste erro e chegou à correcta compreensão da teoria das correntes eléctricas e como esta podia-se harmonizar com a electrostática. O seu importante trabalho sobre a radiação térmica ajudou ao desenvolvimento da Mecânica Quântica.



Se circularmos na malha com o sentido γ assinalado, tem-se:

[2]

A soma das diferenças de potencial ao longo de uma malha fechada é igual a zero:

$$\boxed{\sum_{\substack{malha\\ fechada}} \Delta V = 0}$$

ii) <u>Lei dos nós</u>:

Seja um nó de um circuito onde chegam três condutores (três ramos) percorridos por correntes de densidades $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$ e $\vec{J}_3$.

[3]

As normais $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, e $\vec{n}_3$ foram escolhidas de forma a que as 3 correntes sejam positivas.

A lei dos nós enuncia-se assim da seguinte forma: <u>“A soma das correntes que confluem num dado nó é igual a zero, arbitrando-se, por exemplo, que as correntes que chegam ao nó são positivas e as que partem do nó negativas, ou vice-versa”.</u>

$$\boxed{\sum_{\gamma} i = 0}$$

No caso de figura apresentado, verifica-se: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$.

2) <u>Leis de Kirchhoff em regime quase-estacionário.</u>

Em regime variável as equações anteriores são substituídas por

$$rot\vec{E}^e = 0 \quad \Rightarrow \quad rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div\vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad div\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

i) <u>Lei das malhas</u>:

Como a d.d.p. aos terminais de um circuito bobinado é $v = Ri + L\frac{di}{dt}$, a lei das malhas continua válida desde que nos elementos indutivos puros se considere uma d.d.p. $v_L = L\frac{di}{dt}$ aos seus terminais.

ii) <u>Lei dos nós</u>:

A equação $div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, com $\rho = div\vec{D}$, implica

[4]

Contudo num regime estacionário, isto é, de frequência ω não muito elevada, tem-se

$\left|\vec{J}\right| >> \left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|$, desde que $\sigma_c >> \varepsilon\omega$

E a lei dos nós pode escrever-se aproximadamente sob a forma

$$\boxed{\sum_{Y} i_{condução} = 0},$$

que é a mesma expressão do regime estacionário.

<u>Exercício de aplicação</u>:

Só iremos abordar neste curso circuitos com, no máximo, dois elementos armazenadores de energia (uma bobine e um condensador) descritos por uma equação diferencial de 2ª ordem.

Seja assim o circuito representado na figura (Prob. 190).

[5]

Equação diferencial para $v_c(t)$:
[6]

Equação de um oscilador harmónico forçado com atrito do tipo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F(t),$$

com $\lambda = \dfrac{1}{2RC}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ e $F(t) = \dfrac{v(t)}{LC}$ é a excitação do oscilador.

Equação diferencial para i(t):

$$v = v_L + v_C \quad \Rightarrow \quad v = L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_2 dt + v_c(0)$$

[7]

Os coeficientes de atrito λ e a frequência própria ω_0 são obviamente os mesmos, ao passo que a excitação do oscilador é agora diferente para o caso da intensidade da corrente i(t):

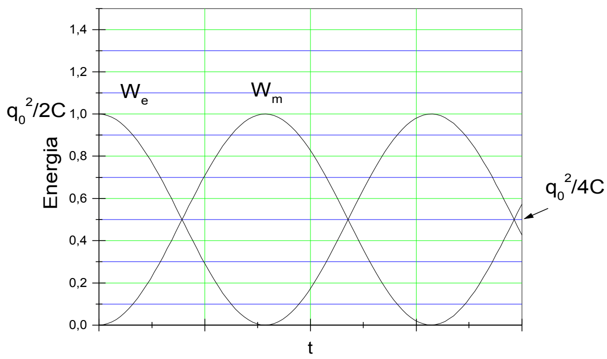
$$F'(t) = \frac{1}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RLC}$$

Oscilações num circuito LC

Vamos ver que num circuito com coeficiente de indução L e uma capacidade C os dois elementos armazenadores de energia carregam-se e descarregam-se alternadamente, apresentando os mesmos valores médios no tempo para a energia armazenada.
[8]

Tem-se assim $\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle = \frac{1}{2} W_e\left(0^-\right)$.

O condensador e a bobine carregam-se e descarregam-se periodicamente, com uma conversão integral de energia eléctrica em energia magnética e vice-versa, apresentando os mesmos valores médios para a energia armazenada, tal como acontece num oscilador harmónico livre sem atrito com a conversão de energia potencial em energia cinética e vice-versa.



Comentário – Definimos <u>valor médio de uma grandeza periódica</u> como:

$$\boxed{\langle X \rangle = \overline{X} = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt}$$

No caso da função $\cos^2(\omega_0 t)$, tem-se

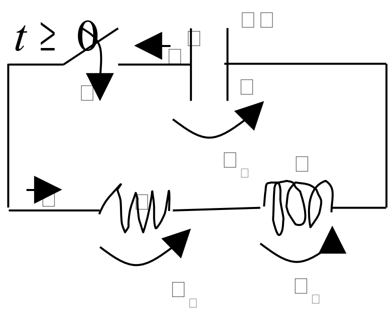
$$\left\langle \cos^2(\omega_0 t) \right\rangle = \frac{1}{T}\int \cos^2(\omega_0 t).dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}.dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

<u>Balanço de potência num circuito RLC</u>

Voltando de novo ao circuito RLC série no qual um condensador inicialmente carregado com a carga q_0 é descarregado sobre uma resistência R e uma indução L.



[9]

Durante a descarga do condensador tem-se num dado instante t:

$$\int_0^t Ri^2 dt + W_e(t) + W_m(t) = \frac{q_0^2}{2C}$$